数理解析研究所講究録
568巻 1985年 159-171

On the diffeomorphism types of elliptic surfaces with multiple fibers

東大理　上　正明 (Masaaki Ue)

複素曲面でリーマン面の上への正則写像をもちその一般的ファイバーが楕円曲線であるものを楕円曲面(elliptic surface)という。ここでは楕円曲面を実4次元多様体と見て、その微分同相類を考える。楕円曲面 $\pi: M \longrightarrow S$ に対して、Mの多重ファイバーのπによる像を$\{p_1, \cdots, p_k\}$とおく。$\pi^{-1}(p_i)$の重複度がm_iであるとすると、Sを$\{p_1 \cdots p_k\}$をcone pointでcone-angle $2\pi/m_i$の2-orbifoldとみなす。このとき次の定理がなりたつ。

定理。$\pi: M \longrightarrow S$, $\pi': M' \longrightarrow S'$ を relatively minimal (fiberに第一種例外曲線

を含まない）楕円曲面とする。$\pi : M \to S$ が次の (i), (ii) をみたすとする。

(i) M に多重トーラス以外に特異ファイバーがある。

(ii) S は orbifold として bad でも、cone point 2個以下の spherical orbifold でもない。

このとき、

$$M \text{ と } M' \text{ が diffeo} \iff e(M) = e(M') \text{ かつ } \pi_1 M \cong \pi_1 M'$$

ただし $e(M)$ は M の euler 数。

注：1) 条件(i)は $e(M) > 0$ に同値である。

2) $\pi_1 M$ は後述の様に S の orbifold としての基本群 $\pi_1^{orb} S$ に同値。特に(ii)の条件のもと、$\pi_1 M \cong \pi_1 M'$ は orbifold として $S \cong S'$ と同値。

§1 証明の概略

Moishezon [3] によると、relatively minimal

な楕円曲面 $\pi: M \longrightarrow S$ は deformation により特異ファイバーは I_1型（一点で transverse に交わる immersed S^2）または mI_0型（重複度 m の多重トーラス）に限るものに diffeo である。（この deformation は S の orbifold type を変えない。）従って以下この type のものだけ考えればよい。一方多重ファイバーがないときは 松本の定理 [2] により M の diffeo type は $e(M)$ と S の種数で完全にきまる。（種数 0 のときは Kas-Moishezon が示した）　また一般の場合、S の種数 h, cone point $p_1, \cdots, p_k$（各重複度 $m_1, \cdots, m_k$）とすると（この S を $\Sigma_h(p_1, \cdots, p_k)$ と書くことにする）M は euler 数が等しく底曲面 Σ_h（即ち多重ファイバーを持たない）の楕円曲面 $\hat{M}$ から k 回の logarithmic transformation を行なって得られる。[2] により $\hat{M}$ の diffeo type は一意的に決まってしまう。ここで $\hat{M}$ の projection $\hat{\pi}: \hat{M} \longrightarrow \Sigma_h$ を1つ次の様に定めておく。（$e(M)$ は常に 12 で割れ、I_1型ファイバーの数に等しい [3] ことに注意する。）

$$\hat{M} = V_g^0 \cup T^2 \times (\Sigma_h - \mathring{D}_2). \qquad \Sigma_h = D^2 \cup (\Sigma_h - \mathring{D}_2)$$

但. $\omega : V_g^0 \longrightarrow D^2$ は $12(g+1)$ 個の I_1 型ファイバーを含み. $\partial V_g^0 \cong T^2 \times \partial D^2$ なる Lefshetz fibration (この diffeotype は g のみで定まる [3]) D_2 は Σ_h の 2-disc.

$\hat{\pi} / V_g^0 = \omega$, $\hat{\pi} / T^2 \times (\Sigma_h - \mathring{D}_2)$ は自然な射影.

ここで $p_1, \cdots, p_k$ は $\Sigma_h - \mathring{D}_2 \subset \Sigma_h$ に含まれるとしてよい. すると M は $\hat{M}$ から $\hat{\pi}^{-1}(p_i)$ の近傍 $\hat{\pi}^{-1}(D_i)$ (D_i's は p_i's の small 2-disc 近傍) $\cong T^2 \times D_i^2$ を抜いて新たに $T^2 \times D^2$ を張りつけることにより得られる. 即ち. logarithmic Transformation は topological には 4次元の Dehn surgery とみなしてよい.

(I) S の orbifold type 及び $e(M)$ を固定する. この時は $\hat{M}$ は up to diffeo は一意. 従って k 個の多重トーラス (各の重複度 $m_1, \cdots, m_k$) のはりつき方によらず. M の diffeo type が一意に決まることをま

ず示さねばならない. i番目の多重ファイバーに相当する Dehn Surgery は diffeo $\varphi_i : T^2\times\partial D_i \longrightarrow \partial_i(\hat{M}-\hat{\pi}^{-1}(\cup D_i)) \cong \hat{\pi}^{-1}(\partial D_i)$ を与えることにより表わされるがこれは $SL_3\mathbb{Z}$ の元により表示される. $\hat{\pi}^{-1}(\partial D_i)$ の座標を (l, h, q_i') — (l, h) は $\hat{M}$ のファイバーの座標を表わす curves. q_i' は 1点 $\times\, \partial_i D_i^2 \subset T^2\times\partial D_i^2 \subset T^2\times(\Sigma_h-\mathring{D}_2) \subset \hat{M}$ で表わされる curve, によって定め, $T^2\times\partial D_i$ の座標を (l_i, h_i, q_i) — $l_i = S^1\times * \times *$, $h_i = *\times S^1\times *$, $q_i = *\times *\times\partial D_i$ — で定めるとき φ_i は $(l_i, h_i, q_i) = (l, h, q_i')A_i$ なる $SL_3\mathbb{Z}$ の元 A_i で表わされる. 多重トーラスのはりつき方は実際には meridian のはりつき方 (A_i の第3列) により決定される. 特に (3.3) 成分は $\pm m_i$ である. (座標系のとり方に ambiguity はあるが最後の性質は不変である)

補題 1. $\hat{M}_R = \hat{M} - \hat{\pi}^{-1}(\cup\, \mathrm{int}\, D_i)$ とおく

上記の座標系 (l, h, q_i') により $B_i = \begin{pmatrix}1 & 0 & \alpha_i \\ 0 & 1 & \beta_i \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}$ で表わされる diffeo. $g_i : \hat{\pi}^{-1}(\partial D_i) \circlearrowleft$ に対して、diffeo $G : \hat{M_k} \circlearrowleft$ で $G | \hat{\pi}^{-1}(\partial D_i) = g_i$ $(i = 1 \cdots k)$ なるものが存在する。

補題2. 上記の座標系 (l, h, q_i') により $C_i = \begin{pmatrix} D_i & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} \\ 0 \; 0 & 1\end{pmatrix}$ $D_i \in SL_2\mathbb{Z}$ で表わされる diffeo. f_i: $\hat{\pi}^{-1}(\partial D_i) \circlearrowleft$ に対して diffeo. $F : \hat{M_k} \circlearrowleft$ で $F | \hat{\pi}^{-1}\partial D_i = f_i$ $(i = 1 \cdots k)$ なるものが存在する。

補題1, 2ともに多重トーラス以外の特異ファイバーが存在することが本質的である. これらと、次の簡単な事実: $T^2 \times \partial D^2$ の self-diffeo g が $T^2 \times D^2$ の self-diffeo に拡張する $\Leftrightarrow$ g が meridian を保つ、とから、M の diffeo type を変えることなく A_i を $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & m_i\end{pmatrix}$ に変換することができる。即ち、M の diffeo type (及びその標準形)が一意に定まる。それを便宜上 $L(m_1, \cdots m_k) V_{g, h}$ と書くことにしよう。

(II). 次に $\pi_1 M$ と S の orbifold type との関係を調べる。

補題 3. 定理の(i)の条件のもとで、$\pi_1 M$ は $\pi_1^{orb} S$ に同型である。

これは、M のファイバーの $\pi_1 M$ への寄与が 0 であるということを意味する。従って問題は oriented 2-orbifold の分類に帰着された。即ち、

(a) S bad or spherical with $\#$cone point $\leq 2 \Leftrightarrow \pi_1^{orb} S$ cyclic (finite). , (b) S spherical with 3 cone points $\Leftrightarrow \pi_1^{orb} S$ polyhedral group of finite order

c) S euclidean or hyperbolic. $\Leftrightarrow \pi_1^{orb} S$ infinite planar discontinuous group. よく知られている様に次の場合を除いて S の orbifold type は $\pi_1^{orb} S$ で決まる。

$\pi_1^{orb} S \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \Leftrightarrow S$ の種数 0, $\#$cone point ≤ 2 でその重複度 $m, n\ (\geq 1)$ とすると、$g.c.d.(m, n) = d$.

Donaldson [1] Morgan Friedman によると、euler数12で(上記の$g=1$)で底曲面Sが back. cone point の重複度$m.n$に対して、$m,n \geq 2$, $g.c.d(m.n)=1$ のもの(Dolgachev surface と呼ばれるclass)はSのorbifold typeが異なるとdiffeoでなく、さらに$m=n=1$(即ち多重ファイバーがない)のcaseのものともdiffeoでない。即ち、上記の記号によれば、$L(m.n)V_{0.0} \neq V_{0.0}$。Freedmanの分類理論から、$L(m.n)V_{0,0}$と$V_{0.0}$は同相であることが知られる。一方$V_{0.0}$は$\mathbb{C}P^2 \# 9\overline{\mathbb{C}P^2}$にdiffeoなので、$\mathbb{C}P^2 \# 9\overline{\mathbb{C}P^2}$に無限個の微分構造が入ることになる。(但、$L(m.1)V_{0.0} = L(m)V_{0.0}$は$V_{0.0}$にdiffeo)。よって上記にのべた定理は彼らの例のcomplementであり、基本群(Sのtype)が十分複雑ならexoticな構造をもつ例はない(少なくとも複素曲面のcategoryでは)ことを主張するものである。(3)の残りのcaseについては不明だが、上記のDonaldson typeの議論がおそらく必要となると思われる。

§2. 特異ファイバーが多重トーラスのみの場合

これはeuler数$=0$と同値．これらのcaseは．4次元の"Seifert fibering"とみなせ．より直接的に3次元のSeifert fiberingの類似物である．そこで3次元のcaseに成立する事実がparallelに成りたっていると期待することは不自然ではないであろう．そして実際この場合は次のことが示せる．（§1の定理に対応するものとして）

定理′：$\pi: M \longrightarrow S$，$\pi': M' \longrightarrow S'$．上記の条件を満たす楕円曲面（Seifert fibering）とする．Sがeuclidean or hyperbolic (as orbifold)と仮定すると．MとM'がdiffeo $\Longleftrightarrow \pi_1 M \cong \pi_1 M'$．

この定理′はS, S'ともhyperbolicならZieschang[6]，$S = S' = T^2$（即ちM, M'ともにT^2上のT^2-bundle）のときは坂本－福原[4]により示されている．

$M, (M')$ の diffeo type は 3次元 Seifert fibering と同様の Seifert invariant によって記述される。即ち底曲面の種数，底曲面の essential curve system に対するファイバーのモノドロミー，多重ファイバーの meridian の attaching を示す Triad，及び cross section を拡張するための障害である。そこで定理を示すためにまず $\pi_1 M \cong \pi_1 M'$ を仮定したとき各の Seifert invariant が一致するようにできるか，（Seifert invariant には curve のとり方に伴う ambiguity がある）どうかを考察する。そのために底曲面の orbifold type を便宜上次の4つに分ける。

(H-1) hyperbolic. genus>0. (H-2) hyperbolic genus=0

(E-1) T^2 (E-2) euclidean genus = 0.

そして オ1 に次を示す。

主張 1. S, S' が上記の同じ class に属するとき $M \cong M'$

（本質的には Zieschang 及本稿原により示されている）

そして次にS, S'が異なるclassに属する場合を考察する。

主張2. 上記のとき、7つのcaseを除いて$\pi_1 M$と$\pi_1 M'$は同型になりえない。除外される7つのcaseはいずれも$S=T^2$, S'は種数0のeuclidean orbifoldでMとM'はdiffeo(当然fiberを保たない)である。

このことから定理を導く。ZieschangはS, S'ともにhyperbolicのとき、regular fiberが生成する$\pi_1 M$ $(\pi_1 M')$の部分群がmaximal normal abelian subgroup of rank 2として唯一のものであること(従ってcharacteristic subgroupであること)を示して主張1を証明した。この論法はeuclidean orbifoldをも許容すると成立しなくなる。このことがT^2上のT^2-bundleの場合独立な議論を必要とさせ[4]、上記主張2の中の例外を生じさせる。例外の7つのcaseはいずれも、Mは自然にS'上のT^3-bundleで

モノドロミーが有限位数なるものの構造をもつ。そして，M（M′）ともに euclidean structure を許容する（即ち $\mathbb{E}^4/G$．Gは $\mathrm{Isom}^+\mathbb{E}^4$ の discrete torsion free subgroup と書ける）。その中の4つは $S^1\times$（S^1上の T^2-bundle でモノドロミーが有限位数）という形をしている。

定理′で除外した case（即ち底曲面が bad 又は spherical）は homotopy type の性質も定理′の case と異なる。特に regular fiber の生成する $\pi_1 M$ の subgroup が必ずしも rank 2 でないので定理′の証明はそのままでは適用しない。従って残る問題は、底曲面が bad 又は spherical のとき M を分類することである。これらの case の基本群はこれまで扱った例の基本群と一致することはない。いずれにせよ base orbifold が十分複雑ならば(1)の場合と同様 exotic なものは存在しない。この点は3次元の Seifert fibering の場合の事実に対応しているといってよい。

参考文献

[1] Donaldson. S. K. The differential topology of complex surfaces, preprint 1985

[2] Matsumoto. Y. Diffeomorphism types of elliptic surfaces. preprint '85

[3] Moishezon. B Complex Surfaces and connected sums of complex projective planes Springer Lect Note 603 '77

[4] Sakamoto-Fukuhara Classification of T^2-bundles over T^2 Tokyo J Math 6 No. 2 '83

[5] Ue. M. On the diffeomorphism types of elliptic surfaces with multiple fibers preprint 1985

[6] Zieschang H. On toric fiberings over surfaces. Math Notes 5, 1969